

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 18.02.2023
CLASA a VII-a

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.
- Timp efectiv de lucru: 3 ore

1.(7p) Arătați că numărul $X = \sqrt{\frac{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2023}}{1 + 2 + 3 + \dots + 2022}}$ nu este rațional.

2.(7p) Se dau numerele:

$$a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} + \dots + \sqrt{3^{2016}}$$

$$b = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016}$$

$$c = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} - 1$$

Arătați că c este pătrat perfect.

Gazeta matematică. Supliment cu exercitii, aprilie 2015.

3. (7p) În patrulaterul convex ABCD, M și N mijloacele laturilor DC respectiv BC. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ și $MN \cap AC = \{P\}$. Arătați că, dacă O este centrul de greutate al triunghiului AMN, atunci patrulaterul ABCD este paralelogram.

4.(7p) Fie paralelogramul ABCD cu $\angle A = 60^\circ$, $AB = 2AD$ și punctele E și F mijloacele laturilor AB, respectiv CD. Fie $AC \cap DE = \{P\}$, $AC \cap FE = \{M\}$ și $AC \cap FB = \{N\}$. Determinați valoarea raportului dintre aria triunghiului ADP și aria Triunghiului MFN.

Gazeta matematică, nr.6-7-8/2022